引文格式:王乐洋,赵卫凤.非线性加性乘性混合误差模型的参数估计方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2025,50(5):845-855.DOI:10.13203/j.whugis20230016

Citation: WANG Leyang, ZHAO Weifeng. Parameter Estimation Methods for Nonlinear Mixed Additive and Multiplicative Random Error Model[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2025, 50(5): 845-855. DOI: 10.13203/j.whugis20230016

非线性加性乘性混合误差模型的参数估计方法

王乐洋[1,2,3] 赵卫凤[1,2]

1 东华理工大学测绘与空间信息工程学院,江西 南昌,330013

2 自然资源部环鄱阳湖区域矿山环境监测与治理重点实验室,江西 南昌,330013

3 江西省测绘地理信息工程技术研究中心,江西 南昌,330025

摘 要:在大地测量领域中,测量数据中不仅含有加性误差,还存在乘性误差。现有的处理加性和乘性混合误差模型的方法主要是基于未知参数和观测值是线性形式的,鲜有对未知参数和观测值是非线性形式的研究。为了扩展加性和乘性混合误差模型的参数估计方法,基于最小二乘原理并应用了泰勒公式展开的思想,推导了非线性加性乘性混合误差模型的最小二乘法、高斯-牛顿法、加权最小二乘法和偏差改正加权最小二乘法4种参数估计方法。通过算例计算和对比分析可知,当模型非线性较高时,偏差改正加权最小二乘方法能够得到更好的参数估计结果,证明了该方法的有效性。该方法也更适用于处理这种非线性的加性和乘性混合误差模型的大地测量数据。

关键词:非线性加性乘性混合误差模型;最小二乘;参数估计;泰勒公式

中图分类号:P207 **文献标识码**:A **收稿日期**:2023-10-15

DOI:10.13203/j.whugis20230016 **文章编号**:1671-8860(2025)05-0845-11

Parameter Estimation Methods for Nonlinear Mixed Additive and Multiplicative Random Error Model

WANG Leyang[1,2,3] *ZHAO Weifeng*[1,2]

1 School of Surveying, Mapping and Space Information Engineering, East China University of Technology, Nanchang 330013, China

2 Key Laboratory of Mine Environmental Monitoring and Improving Around Poyang Lake, Ministry of Natural Resources, Nanchang 330013, China

3 Jiangxi Province Engineering Research Center of Surveying, Mapping and Geographic Information, Nanchang 330025, China

Abstract: **Objectives**: In the field of geodesy, with the continuous development of modern observation technology, so that the measurement data not only contain additive errors, there are also multiplicative errors, purely considering the processing of additive errors can no longer meet the requirements. Existing methods for dealing with mixed additive and multiplicative errors models are mainly based on the fact that the unknown parameters and observations are in linear form, and few studies have been conducted on the fact that the unknown parameters and observations are in nonlinear form. **Methods**: In order to extend the parameter estimation method of the mixed additive and multiplicative errors model, we determine the reasonable weight matrix of nonlinear mixed additive and multiplicative errors model based on the law of error propagation and the principle of least squares and applies the idea of Taylor's formula expansion, and derive the least squares, Gauss-Newton method, and weighted least squares of the nonlinear mixed additive and multiplicative errors model. Due to the nonlinear nature, it makes the weighted least squares solution biased, so it needs to be analyzed for its bias. The bias-corrected weighted least squares method is derived by deviation analysis and proof. **Results**: It can be seen through the calculation and comparative analysis of the arithmetic examples that a reasonable weighting method is conducive to improving the correctness of the model parameter estimation results, and when the model

基金项目:国家自然科学基金(42174011);东华理工大学研究生创新基金(DHYC-202329)。

第一作者:王乐洋,博士,教授,研究方向为大地测量反演及大地测量数据处理。wleyang@163.com

nonlinearity is high, the bias-corrected weighted least squares method can obtain better parameter estimation results. **Conclusions**: The feasibility and validity of four methods for parameter estimation of the nonlinear mixed additive and multiplicative errors model are demonstrated, and the bias-corrected weighted least squares method is more suitable for processing geodetic data from such nonlinear models with a mixture of mixed additive and multiplicative errors.

Key words: nonlinear mixed additive and multiplicative random errors model; least squares; parameter estimation; Taylor's formula

测量平差的本质在于处理一系列带有误差的观测值[1],而观测数据可以通过仪器直接测量,也可以通过其他手段获得,这使得任何观测数据不可避免地带有误差,对于有用的信息造成干扰。随着无线电技术和现代测绘科学技术的飞速发展,获取观测数据的高新测量技术也越来越新颖。而高新测量技术的蓬勃发展使得观测数据中的误差不再只有加性误差,还存在着一种与观测值或者物理信号相关的乘性误差,如合成孔径雷达、全球导航卫星系统和光电测距等[2-5]。

目前,在大地测量领域,现有的平差方法大多是针对于加性误差,对于乘性误差或加性乘性混合误差模型的理论研究相对而言并不丰富,大多是基于未知参数与观测值是线性形式,这使得加性乘性混合误差模型的研究具有一定的局限性[6]。但在大地测量的实际问题中,绝大多数函数模型的观测值和未知参数是非线性的,为了填补非线性加性乘性混合误差模型处理方法的研究空白,满足现代高新测量数据处理的需要,迫切需要研究相应的平差方法,以适应大地测量数据处理的发展。

对于乘性误差模型的研究,统计学、工程科学领域及大地测量领域都有相应的研究。在统计学中,文献[6-8]介绍了拟似然法是乘性误差模型参数估计理论方法与应用的主流方法,但也存在着目标函数不明确和无法确定合适的拟似然解等问题。考虑到上述问题,文献[8]首次将最小二乘(least squares,LS)原理应用到乘性误差模型的参数估计理论中,提出了参数估计的偏差改正加权最小二乘法(bias-corrected weighted least squares,BCWLS),证明该方法在一定程度上等价于最大似然理论;在此基础上,文献[9]推导了其相应的精度评定公式。当乘性误差模型存在病态问题时,文献[10]结合Tikhonov正则化方法,推导了相应的加权最小二乘法(weighted least squares,WLS)正则化解,并利用无迹变换进行了相应的精度评定;文献[11]考虑了乘性误差模型的WLS参数估值与观测值之间的非线性关系,采用了Sterling插值方法对其进行了精度评定,达到二阶精度。当乘性误差随机模型存在粗差时,文献[12]推导了其标准正态检验法、t法和F-T法,其实验结果验证了推导公式在乘性误差随机模型粗差探测的可行性。在乘性误差模型的研究基础上,文献[13]将其拓展为加性乘性混合误差模型,并推导了相应的参数估计方法,模拟算例验证了偏差改正WLS是二阶近似无偏的,且精度较高;文献[14]利用A-优化设计方法确定的正则化参数与模型的观测方程以及虚拟观测方程相结合,推导了病态的加性乘性混合误差模型的虚拟观测迭代解;文献[15]构建了一个惩罚函数,其惩罚因子随迭代次数增加而增加,推导了不等式约束下加性乘性混合误差模型的一种简单迭代解法,通过算例对比验证了该方法的有效性。

上述研究大多是基于未知参数和观测值是线性形式的情形,为了丰富加性乘性混合误差模型的研究,本文将其未知参数与观测值之间的关系扩展为非线性形式。非线性模型参数估计的方法主要有线性化法、迭代解法以及启发式搜索算法等[16-25]。线性化方法的主要思想在于使用线性模型的求解理论与方法近似求解非线性模型,其原理简单,但当模型的非线性程度较强时,解的质量将会受到影响。迭代解法主要有牛顿迭代法、高斯牛顿法、信赖域法和拟牛顿法等,此类算法的收敛速率较高,但依赖于迭代初值,当迭代初值较差时,可能会出现迭代不收敛的情况[18-20]。然而,在实际问题的参数解算时,迭代初值可以通过某种方法求得一个近似真值的值,因此在一定程度上能够避免迭代算法受初值较差而导致迭代发散的问题。启发式搜索算法的优点在于无需进行复杂的求导,例如粒子群算法、模拟退火算法、神经网络算法和遗传算法等,但此类方法的弊端在于计算效率低[21-25]。由此可见,在大地测量领域中,对于非线性加性误差模型的理论研究和方法已很丰富。

本文基于上述非线性模型及加性乘性混合

误差模型的研究,将处理非线性模型的理论和方法扩展到非线性加性乘性混合误差模型的研究中,当未知参数和观测值的关系是非线性的形式时,基于LS原理,推导了其相应的LS解、高斯-牛顿解、WLS解及BCWLS解,通过模拟实验验证了公式的可行性和有效性,当模型的非线性强度较高时,偏差改正WLS相对而言更加精确。

1　非线性加性乘性混合误差模型

若一组观测值混有加性和乘性随机误差,其相应的加性和乘性混合误差模型的数学表达式为[6]:

$$\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{\beta})\odot(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\varepsilon}_m)+\boldsymbol{\varepsilon}_a \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^{n\times 1}$为观测值;$f(\boldsymbol{\beta})$表示未知参数的函数;$\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{R}^{t\times 1}$表示未知参数;$\odot$表示为向量或者矩阵的Hadamard积;$\boldsymbol{1}$表示元素全为1的列向量;$\boldsymbol{\varepsilon}_m\in\boldsymbol{R}^{n\times 1}$表示零均值乘性随机误差;$\boldsymbol{\varepsilon}_a\in\boldsymbol{R}^{n\times 1}$表示零均值加性随机误差,两者均服从正态分布。

其线性加性乘性混合误差模型可以表达为:

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\odot(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\varepsilon}_m)+\boldsymbol{\varepsilon}_a \tag{2}$$

式中,$\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right]^{\mathrm{T}}$,其中$\boldsymbol{a}_i\in\boldsymbol{R}^{1\times t}(i=1,2,\cdots,n)$;$\boldsymbol{\beta}=\left[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right]^{\mathrm{T}}$。

本文研究的$f(\boldsymbol{\beta})$是$\boldsymbol{\beta}$的非线性函数形式,乘性和加性随机误差的方差-协方差矩阵分别为$\boldsymbol{\Sigma}_m=\sigma_m^2\boldsymbol{Q}_m$,$\boldsymbol{\Sigma}_a=\sigma_a^2\boldsymbol{Q}_a$,$\sigma_m^2$和$\sigma_a^2$分别为$\boldsymbol{\varepsilon}_m$和$\boldsymbol{\varepsilon}_a$的单位权方差,假定$\boldsymbol{Q}_m$和$\boldsymbol{Q}_a$都是正定阵,可以将其Cholesky分解,转换成单位阵[6]。通常假设$\boldsymbol{\varepsilon}_m$和$\boldsymbol{\varepsilon}_a$彼此独立且各自具有相同的方差,即$\boldsymbol{\Sigma}_m=\sigma_m^2\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{\Sigma}_a=\sigma_a^2\boldsymbol{I}$,则根据误差传播定律,可以获得非线性加性乘性混合误差模型观测值的期望、方差-协方差矩阵分别为:

$$E(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{\beta}) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_y=\mathrm{diag}\left(f(\boldsymbol{\beta})^2\right)\sigma_m^2+\boldsymbol{I}\sigma_a^2 \tag{4}$$

式中,$\mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\beta})^2)$为对角线上元素为$f(\boldsymbol{\beta})^2$的对角阵。可以看出,在非线性加性乘性混合误差模型中,观测值的方差-协方差矩阵与未知参数$\boldsymbol{\beta}$有关,是未知参数的函数。

1.1　非线性加性乘性混合误差模型的LS估计

当模型的非线性强度较低时,其参数求解方法一般采用线性化LS法[20],其主要思想在于用非线性函数模型的一阶泰勒函数近似逼近该函数模型。利用泰勒级数将式(1)中的非线性函数$f(\boldsymbol{\beta})$在参数初值$\boldsymbol{\beta}_0$处展开至一次项,得到线性化后的函数为:

$$f(\boldsymbol{\beta})\approx f(\boldsymbol{\beta}_0)+\boldsymbol{J}_{\beta_0}\Delta\boldsymbol{\beta} \tag{5}$$

式中,$\Delta\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0$;$\boldsymbol{J}_{\beta_0}$为$\dfrac{\partial f(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}}$在$\boldsymbol{\beta}_0$处取值的Jacobian矩阵。

由式(1)和式(5)联立可得线性误差方程:

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{J}_{\beta_0}\Delta\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{L} \tag{6}$$

式中,$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{\beta}_0)$。

应用LS原理求解其线性化LS解为:

$$\Delta\boldsymbol{\beta}=\left(\boldsymbol{J}_{\beta_0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{\beta_0}\right)^{-1}\boldsymbol{J}_{\beta_0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \tag{7}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{LS}}=\boldsymbol{\beta}_0+\Delta\boldsymbol{\beta} \tag{8}$$

1.2　非线性加性乘性混合误差模型的高斯-牛顿法

应用普通LS准则于式(1),得目标函数:

$$\min:F_1=\left(\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{\beta})\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{\beta})\right) \tag{9}$$

由于$f(\boldsymbol{\beta})$是$\boldsymbol{\beta}$的非线性形式,当模型非线性强度较低时,可采用上述解法将其线性化近似。对于精度较低的初始值,则需要进行迭代计算,而常用的迭代解法为高斯-牛顿法等[18-20],其主要思想在于用线性化LS估计去逼近非线性LS估计。其求解步骤如下:

1)假定在选定初始值$\boldsymbol{\beta}_0$后,迭代已求得$\hat{\boldsymbol{\beta}}_k$,现考虑$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k+1}$的求法;

2)将$f(\boldsymbol{\beta})$在$\hat{\boldsymbol{\beta}}_k$处按泰勒公式线性化得:

$$f(\boldsymbol{\beta})=f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_k\right)+\boldsymbol{B}_k\delta\boldsymbol{\beta}_k \tag{10}$$

式中,$\boldsymbol{B}_k=\left.\dfrac{\partial f(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}}\right|_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_k}$;$\delta\boldsymbol{\beta}_k=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k+1}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_k$。

3)将式(10)代入目标函数对未知参数$\boldsymbol{\beta}$求导并令其等于0的方程中,即:

$$\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_k\delta\boldsymbol{\beta}_k=\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_k \tag{11}$$

式中,$\boldsymbol{l}_k=\boldsymbol{y}-f(\hat{\boldsymbol{\beta}}_k)$。

目标函数(9)的最优解就是$\boldsymbol{\beta}$的LS估计,即:

$$\delta\boldsymbol{\beta}_k=\left(\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_k\right)^{-1}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_k \tag{12}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k+1}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_k+\delta\boldsymbol{\beta}_k \tag{13}$$

4)采用式(12)和式(13)进行迭代求解,若满足迭代终止条件$\|\delta\boldsymbol{\beta}_k\|<\varepsilon_0$,则输出该结果;否则,继续进行迭代,直到满足收敛条件。

1.3　非线性加性乘性混合误差模型的WLS估计

对非线性加性乘性混合误差模型应用WLS准则,其目标函数为:

$$\min:F=\left(\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{\beta})\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\left(\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{\beta})\right) \tag{14}$$

对式(14)求未知参数$\boldsymbol{\beta}$的偏导数,并令其等于0有:

$$2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}\left(f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)-\boldsymbol{y}\right)+\begin{bmatrix}\left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)\right)^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}}{\partial\beta_1}\left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)\right)\\ \left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)\right)^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}}{\partial\beta_2}\left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)\right)\\ \vdots\\ \left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)\right)^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}}{\partial\beta_t}\left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)\right)\end{bmatrix}=0 \tag{15}$$

式中，$\boldsymbol{X}=\left.\dfrac{\partial f(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}}\right|_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}}$，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}$是$\boldsymbol{\beta}$的WLS估计值；$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}$是$\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}$的估值。根据矩阵微分原理，并记$\hat{\boldsymbol{D}}_1=\mathrm{diag}\left(f\left(\boldsymbol{\beta}\right)\right)$，$\boldsymbol{x}_i=[x_{1i}\ x_{2i}\cdots x_{ni}]^{\mathrm{T}}$，则有：

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}}{\partial\boldsymbol{\beta}_i}=\frac{-2\sigma_m^2\mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_i)\hat{\boldsymbol{D}}_1}{\left[\mathrm{diag}\left(f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)^2\sigma_m^2\right)+\boldsymbol{I}\sigma_a^2\right]^2} \tag{16}$$

将式(16)代入式(15)，并将$f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)$在初始值$\boldsymbol{\beta}_0$处泰勒公式展开得：

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}\boldsymbol{X}\Delta\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}\boldsymbol{l}-\boldsymbol{V}_\varepsilon=0 \tag{17}$$

式中，$\Delta\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}-\boldsymbol{\beta}_0$；$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{y}-f\left(\boldsymbol{\beta}_0\right)$；

$$\boldsymbol{V}_\varepsilon=\begin{bmatrix}\left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)\right)^{\mathrm{T}}\sigma_m^2\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-2}\mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_1)\hat{\boldsymbol{D}}_1\left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)\right)\\ \left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)\right)^{\mathrm{T}}\sigma_m^2\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-2}\mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_2)\hat{\boldsymbol{D}}_1\left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)\right)\\ \vdots\\ \left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)\right)^{\mathrm{T}}\sigma_m^2\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-2}\mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_t)\hat{\boldsymbol{D}}_1\left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)\right)\end{bmatrix} \tag{18}$$

求解方程(17)，得非线性加性乘性混合误差模型的(形式)解为：

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}=\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}\boldsymbol{l}+\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{V}_\varepsilon \tag{19}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}=\boldsymbol{\beta}_0+\Delta\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}} \tag{20}$$

由非线性回归分析可知，函数的非线性特性会使参数估计产生偏差，而信号$f\left(\boldsymbol{\beta}\right)$、$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}$和$\boldsymbol{V}_\varepsilon$都是$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}$的非线性函数，则非线性加性乘性混合误差模型的WLS估计必会产生偏差，也不再具有无偏性。

2 非线性加性乘性混合误差模型的WLS估计偏差分析

由于式(1)的WLS估计是有偏的，所以有必要对参数估计的偏差进行分析。首先，需要将观测值的方差-协方差矩阵的逆矩阵$\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}$在未知参数的真值$\boldsymbol{\beta}$处进行泰勒公式的一阶近似展开。$\boldsymbol{r}$为观测值的残差值，即：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right) \tag{21}$$

记WLS估计与其真值之差为$\boldsymbol{b}$，则有：

$$\boldsymbol{b}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{b}_\beta \tag{22}$$

式中，$\boldsymbol{A}$是确定性矩阵；$\boldsymbol{\varepsilon}=\left[\boldsymbol{\varepsilon}_m^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_a^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{b}_\beta$是$\boldsymbol{\varepsilon}$的二次型。

逆矩阵$\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}$在未知参数的真值$\boldsymbol{\beta}$处泰勒公式一阶近似展开值为：

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}=\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}-\Delta\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \tag{23}$$

$$\Delta\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}=\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\left(\boldsymbol{D}_{ab}\sigma_m^2\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_1\sigma_m^2\boldsymbol{D}_{ab}\right)\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \tag{24}$$

式中，$\boldsymbol{D}_{ab}$为对角矩阵，其第i个对角元素为$\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}$。

将$f(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}})$在真值$\boldsymbol{\beta}$处泰勒公式展开，并将式(22)代入式(21)得：

$$\boldsymbol{r}=f\left(\boldsymbol{\beta}\right)\odot\boldsymbol{\varepsilon}_m+\boldsymbol{\varepsilon}_a-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}_\beta \tag{25}$$

令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_y=f\left(\boldsymbol{\beta}\right)\odot\boldsymbol{\varepsilon}_m+\boldsymbol{\varepsilon}_a \tag{26}$$

将式(23)～(26)代入式(15)中，并将式(15)限制为$\boldsymbol{\varepsilon}=\left[\boldsymbol{\varepsilon}_m^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_a^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$的二阶近似，重新排列后，将式(15)改写为：

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}-\Delta\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\right)\left(-\boldsymbol{\varepsilon}_y+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}_\beta\right)-\boldsymbol{G}\boldsymbol{\varepsilon}_y=0 \tag{27}$$

式中，

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{D}_{ae_1}\sigma_m^2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\\ \left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{D}_{ae_2}\sigma_m^2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\\ \vdots\\ \left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{D}_{ae_t}\sigma_m^2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\end{bmatrix} \tag{28}$$

展开为：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\left(-\boldsymbol{\varepsilon}_y+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}_\beta\right)+\\&\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\left(\boldsymbol{D}_{ab}\sigma_m^2\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_1\sigma_m^2\boldsymbol{D}_{ab}\right)\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_y-\\&\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\left(\boldsymbol{D}_{ab}\sigma_m^2\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_1\sigma_m^2\boldsymbol{D}_{ab}\right)\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\\&\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{\varepsilon}_y=0\end{aligned} \tag{29}$$

式中,

$$\boldsymbol{G}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\epsilon}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{D}_{ae_1}\sigma_m^2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\\ \boldsymbol{\epsilon}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{D}_{ae_2}\sigma_m^2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\epsilon}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{D}_{ae_t}\sigma_m^2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\end{bmatrix} \tag{30}$$

因为 $\boldsymbol{\epsilon}_m$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}_a$ 是任意的,为了使式(29)成立,其一阶项和二阶项的系数都要为零,对于一阶项,有:

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\left(-\boldsymbol{\epsilon}_y+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\epsilon}\right)=0 \tag{31}$$

则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\epsilon}=\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_y \tag{32}$$

式中,

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{X} \tag{33}$$

在二阶项情况下,将式(32)代入式(29)中,得:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{N}\boldsymbol{b}_\beta+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\left(\boldsymbol{D}_{ab}\sigma_m^2\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_1\sigma_m^2\boldsymbol{D}_{ab}\right)\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_y-\\&\quad\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\left(\boldsymbol{D}_{ab}\sigma_m^2\boldsymbol{D}_1+\right.\\&\left.\boldsymbol{D}_1\sigma_m^2\boldsymbol{D}_{ab}\right)\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_y-\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{\epsilon}_y=0\end{aligned} \tag{34}$$

将文献[4]的引理扩展到非线性加性乘性混合误差模型的WLS估计的偏差分析时,总结偏差的一般结果。对于具有混合加性和乘性随机误差 $\boldsymbol{\epsilon}_a$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}_m$ 的一般形式的加性和乘性混合模型,假设 $\boldsymbol{\epsilon}_a$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}_m$ 彼此独立且均值为零、方差-协方差矩阵分别为 $\boldsymbol{\Sigma}_a$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_m$,WLS估计的偏差是由于 $\boldsymbol{\Sigma}_y$ 对参数 $\boldsymbol{\beta}$ 的依赖性,由

$$\boldsymbol{b}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)=E\left(\boldsymbol{b}_\beta\right)=\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{G}_2 \tag{35}$$

式中,$\boldsymbol{b}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}\right)$ 表示WLS估计值 $\boldsymbol{\beta}$ 的偏差;

$$\boldsymbol{G}_2=\begin{bmatrix}\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{D}_{ae_1}\sigma_m^2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\right\}\\ \mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{D}_{ae_2}\sigma_m^2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\right\}\\ \vdots\\ \mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{D}_{ae_t}\sigma_m^2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\right\}\end{bmatrix} \tag{36}$$

该证明类似于文献[4]中的引理证明。从该引理可知,$\boldsymbol{\beta}$ 的WLS估计偏差确实归因于 $\boldsymbol{\Sigma}_y$ 对 $\boldsymbol{\beta}$ 的依赖性,因为式(36)中的向量 $\boldsymbol{G}_2$ 来自于 $\boldsymbol{\Sigma}_y$ 对 $\boldsymbol{\beta}$ 的非零偏导数。

3　非线性加性乘性混合误差模型的BCWLS估计

通过对式(1)未知参数的WLS估计的偏差分析得,偏差项对应了目标函数对未知参数求导后的第3项,因此,去掉方程式(17)等号左边的第3项,就能够得到模型偏差改正后的WLS参数估值,称为BCWLS估计,记为 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{BCWLS}}$,则式(17)化为:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\left(\boldsymbol{y}-f\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{BCWLS}}\right)\right)=\\&\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\left(\boldsymbol{y}-f\left(\boldsymbol{\beta}\right)-\boldsymbol{X}\Delta\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{BCWLS}}\right)=0\end{aligned} \tag{37}$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{BCWLS}}=\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{l} \tag{38}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{BCWLS}}=\boldsymbol{\beta}_0+\Delta\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{BCWLS}} \tag{39}$$

因为 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{BCWLS}}$ 是一个与 $\boldsymbol{\beta}$ 相关的非线性函数,需要对其进行迭代求解。选定合适的初始值,利用式(38)和式(39)迭代求解,直到满足迭代终止条件,输出结果。

4　算例及分析

为了验证本文基于非线性加性乘性混合误差模型和泰勒级数展开的思想所推导的LS、高斯-牛顿法、WLS及BCWLS的求解公式在参数估计中的性能,本文通过模拟3个非线性强度逐渐增加的模拟算例,并对其参数估计结果进行对比分析。分别将上述4种参数估计方法命名为方案1、方案2、方案3和方案4。

4.1　算例1

为了初步验证本文所推导的LS、高斯-牛顿法、WLS、BCWLS在非线性加性乘性混合误差模型中的可行性,算例1模拟了一个简单的非线性强度较弱的非线性加性乘性混合误差模型。非线性模型的函数形式如下:

$$f\left(\boldsymbol{\beta}\right)=\mathrm{e}^{\beta_1\boldsymbol{x}^2+\beta_2\boldsymbol{x}+\beta_3} \tag{40}$$

式中,$\boldsymbol{x}$ 是 n 维自变量向量;β_1、β_2、β_3 为模型的未知参数。受到 $\boldsymbol{\epsilon}_m$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}_a$ 干扰的拟合模型为:

$$\boldsymbol{y}=\mathrm{e}^{\beta_1\boldsymbol{x}^2+\beta_2\boldsymbol{x}+\beta_3}\odot\left(1+\boldsymbol{\epsilon}_m\right)+\boldsymbol{\epsilon}_a \tag{41}$$

式中,$\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 对应的因变量;$\boldsymbol{\epsilon}_m$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}_a$ 分别为独立同分布的乘性随机误差和加性随机误差。

本算例中,自变量 $\boldsymbol{x}$ 在[0,1]内以0.01的间隔均匀取值,设定 β_1、β_2 和 β_3 的真值分别为1、2和1,$\boldsymbol{\epsilon}_m$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}_a$ 的标准差分别为0.05和0.15,单位权方差为0.09。

为了说明该拟合模型受乘性和加性混合误差的影响程度,将该模型受乘性和加性混合误差干扰前后的数据绘于图1中。可以看出,由于误差的干扰,使得模型上的各点严重偏离原有的位置。为了减小乘性和加性混合误差对该拟合模型的影响,利用前面定义的4种方案分别对该误差模型的未知参数和单位权方差进行求解,共100组独立模拟实验参数估计结果,其均值、单位权方差和2范数分别列于表1。由于乘性和加性误差随机性的影响,参数估值的100组独立模拟实验结果之间波动较大,因此将其数据绘于图2中。

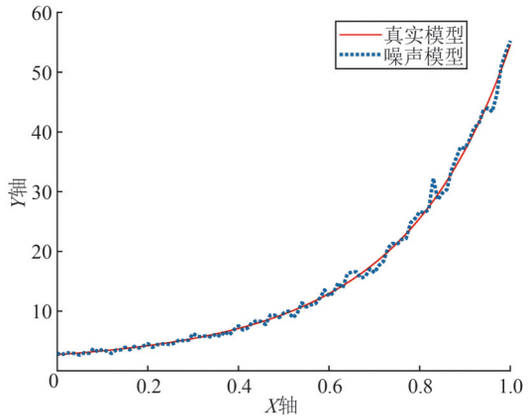


图1 算例1中真实模型与噪声模型

Fig. 1 Real Model and Noise Model in Example 1

由图1可知,由于乘性和加性混合随机误差对于该非线性拟合模型的影响很严重,使得其值偏离了真值。从表1中参数估值与其真值的2范数可得,方案1和方案2求得的2范数结果都较大;由于方案3考虑了观测值的权,其结果更接近于真值,其2范数为0.012 027,从中可知,加性和乘性随机误差对于非线性拟合模型的影响很大,而合理的定权方案有利于参数的正确估计;方案4是对方案3的参数估值进行了偏差改正,由于该模型的非线性强度较弱且函数形式较为简单,其2范数与方案3的2范数相差不大,为0.012 021。由表1中的单位权方差可知,由于方案1和方案2均未考虑模型观测值的权,导致求得的单位权方差与真值之间相差较大,而方案3和方案4都考虑了其影响,使得单位权方差的估值更接近于真值,上述结论也在一定程度上表明了合理的定权方法对于参数估值的积极影响,方案3和方案4相对于方案1和方案2更有优势。

表1 模型1拟合的参数估值与2范数

Table 1 Fitting Parameter Estimation and 2-Norm of Model 1

项目	β_1	β_2	β_3	$\|\Delta\beta\|$	σ_0^2
真值	1	2	1		0.09
方案1	0.987 008	2.014 165	0.996 062	0.019 620	1.029 960
方案2	0.985 249	2.017 070	0.994 818	0.023 148	1.029 940
方案3	0.990 915	2.007 752	0.998 577	0.012 027	0.092 289
方案4	0.990 943	2.007 731	0.998 354	0.012 021	0.092 324

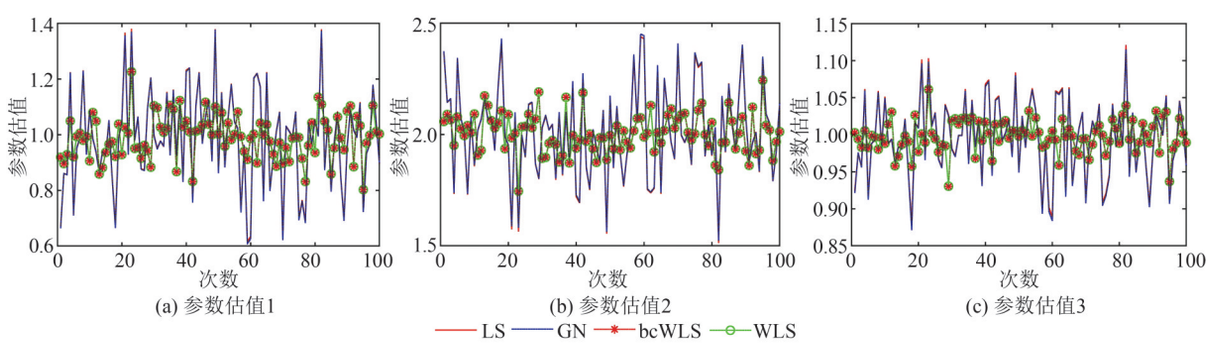


图2 100组各个参数估值结果

Fig. 2 Estimation Results of Each Parameter in 100 Groups

4.2 算例2

为进一步验证本文所推导的LS、高斯-牛顿法、WLS、BCWLS在非线性加性乘性混合误差模型中的可行性,算例2模拟了一个简单的非线性强度较强的非线性加性乘性混合误差模型。非线性模型的函数形式如下:

$$f(\boldsymbol{\beta})=\beta_1 e^{\beta_2 x} \tag{42}$$

受到ε_m和ε_a干扰的拟合模型为:

$$\boldsymbol{y}=\beta_1 e^{\beta_2 x}\odot(1+\varepsilon_m)+\varepsilon_a \tag{43}$$

式中,各字母的含义同式(41)。

本算例中,自变量$\boldsymbol{x}$在[0,1]内以0.01的间隔均匀取值,设定β_1和β_2的真值分别为5和10,ε_m和ε_a的标准差分别为0.05和0.15,单位权方差为0.09。

为了说明该拟合模型受乘性和加性混合误差的影响程度,将该模型受乘性和加性混合误差干扰前后的数据绘于图3中。可以看出,由于误差的干扰,模型上的各点严重偏离原有的位置。为了减小乘性和加性混合误差对该拟合模型的影响,利用前面4种方案分别对该误差模型的未知参数和单位权方差进行求解,共100组独立模拟实验参数估计结果,其均值、单位权方差和2范数分别列于表2。由于乘性和加性误差随机性的影响,参数估值的100组独立模拟实验结果之间波动较大,将其数据绘于图4中。

由图3可知,拟合模型受到乘性和加性混合误差的扰动很大。将表2中参数估值与真值的2范数进行对比分析可知,方案2的2范数结果最大,原因在于对于未考虑观测值的权,在每次迭代过程中会受到初始值和加性乘性混合随机误

差的影响。方案 1 比方案 2 的 2 范数结果要好一些,主要是由于其未迭代,受到随机误差的影响较小;而方案 3 考虑了观测值的权,其结果优于前方案 1 和方案 2,其 2 范数为 0.006 926,从中可知,加性和乘性误差对于非线性拟合模型的影响很大,而合理的定权方案有利于参数的正确估计;方案 4 是对方案 3 的参数估值进行了偏差改正,其 2 范数比方案 3 的 2 范数小,为 0.005 830,说明方案 4 在非线性较强的加性乘性混合误差模型求解参数估值中的优势。

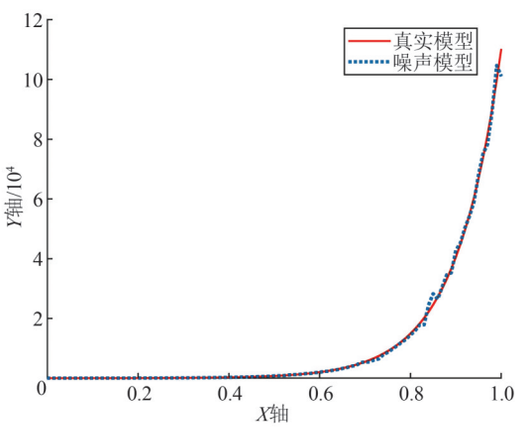


图 3　算例 2 中真实模型与噪声模型

Fig. 3　Real Model and Noise Model in Example 2

表 2　模型 2 拟合的参数估值与 2 范数

Table 2　Fitting Parameter Estimation and 2-Norm of Model 2

项目	β_1	β_2	$\|\Delta\beta\|$	σ_0^2
真值	5	10		0.09
方案 1	5.057 011	9.987 402	0.058 386	2 207 085.078 748 15
方案 2	5.129 931	9.991 278	0.130 223	1 436 409.490 533 27
方案 3	5.006 830	9.998 851	0.006 926	0.089 219
方案 4	5.005 717	9.998 858	0.005 830	0.089 257

对比分析表 2 中的单位权方差可知,方案 1 和方案 2 求得的单位权方差与其真值之间相差过大,而方案 3 和方案 4 求解的单位权方差与真值很相近,其原因在于方案 1 和方案 2 均未考虑模型观测值的权,而方案 3 和方案 4 都考虑了其影响,因此单位权方差的估值更加接近于真值。从上述结论可知,对于非线性加性和乘性混合误差模型的参数估计验证了该定权方法的合理性与正确性,对于参数估值有着积极的影响,方案 4 相对于方案 1~3 更有优势。

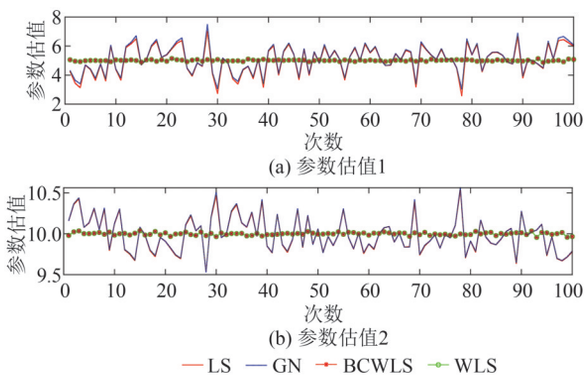


图 4　100 组各个参数估值结果

Fig. 4　Estimation Results of Each Parameter in 100 Groups

4.3　算例 3

为了说明 LS、高斯-牛顿法、WLS 和 BCWLS 在处理非线性加性乘性混合误差模型的实际数据的可行性和应用价值,算例 3 采用了 Mogi 模型[26]。该模型可以利用火山区域的地表形变观测数据来反演火山岩浆压力源参数,火山岩浆压力源参数对于火山的危险性评价有着非常重大的实际意义。地表位移包括了垂直位移和水平位移,本文采用了 Mogi 提出的垂直位移单一反演的火山形变 Mogi 模型。地表垂直位移的非线性函数形式如下[26]:

$$f(\boldsymbol{\beta})=\frac{3D\Delta V}{4\pi\left(D^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^{3/2}} \tag{44}$$

式中,ΔV 表示体积增量;D 表示火山岩浆压力源的中心深度;(x_0,y_0) 表示岩浆压力源中心在平面上的投影坐标。受到 ε_m 和 ε_a 干扰的地表垂直位移模型为:

$$\Delta h=\left(\frac{3D\Delta V}{4\pi\left(D^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^{3/2}}\right)\odot(1+\varepsilon_m)+\varepsilon_a \tag{45}$$

式中,Δh 表示地表垂直位移;ε_m 和 ε_a 分别为 Δh 的独立同分布的乘性随机误差和加性随机误差;$\boldsymbol{\beta}=[\Delta V, D, x_0, y_0]$ 向量中的元素分别为 β_1、β_2、β_3 和 β_4 4 个未知参数。

算例 3 仿真了某一火山区域的垂直位移观测数据,观测点横、纵坐标 x、y 的取值范围均为 $[-5,5]$ km,相邻垂直形变监测点的间隔为 0.5 km,压力源参数真值分别设置为 6 000×103 km、4 km、0 km、0 km。将以上数据代入到 Mogi 模型中通过正演可以得到地表垂直位移,然后将 ε_m 和

ε_a施加到垂直位移模拟位移值中,ε_m和ε_a均值均为0,标准差分别为0.05 mm和15 mm,得到受混合误差干扰后的垂直位移如图5所示,其图例表示由Mogi模型正演得到的含加性乘性混合误差的垂直形变长度。

为了减小乘性和加性混合误差对地表垂直位移模型的影响,利用前面4种方案分别对该误差模型的未知参数和单位权方差进行求解,共100组独立模拟实验参数估计结果,其均值、单位权方差和2范数分别列于表3。由于乘性和加性误差随机性的影响,参数估值的100组独立模拟实验结果之间波动较大,因此将其数据绘于图6中。

尽管本算例中施加的乘性随机误差的标准差仅为0.05,但是对于垂直位移模型的干扰也是很严重的,由此可见,对于受到加性和乘性随机误差干扰的地表垂直位移模型的研究是有必要的。

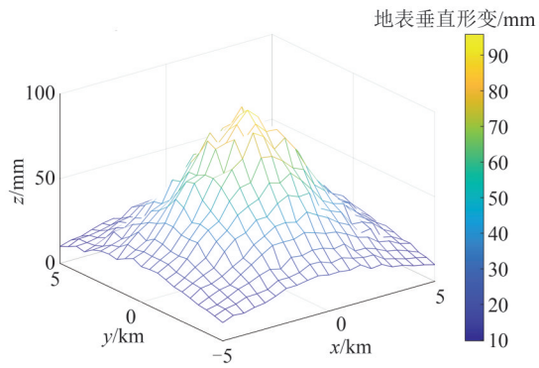


图5 由火山Mogi模型正演得到的地表垂直形变(含加性乘性误差)

Fig. 5 Vertical Displacement of Forward the Volcano Mogi Model (with Additive and Multiplicative Errors)

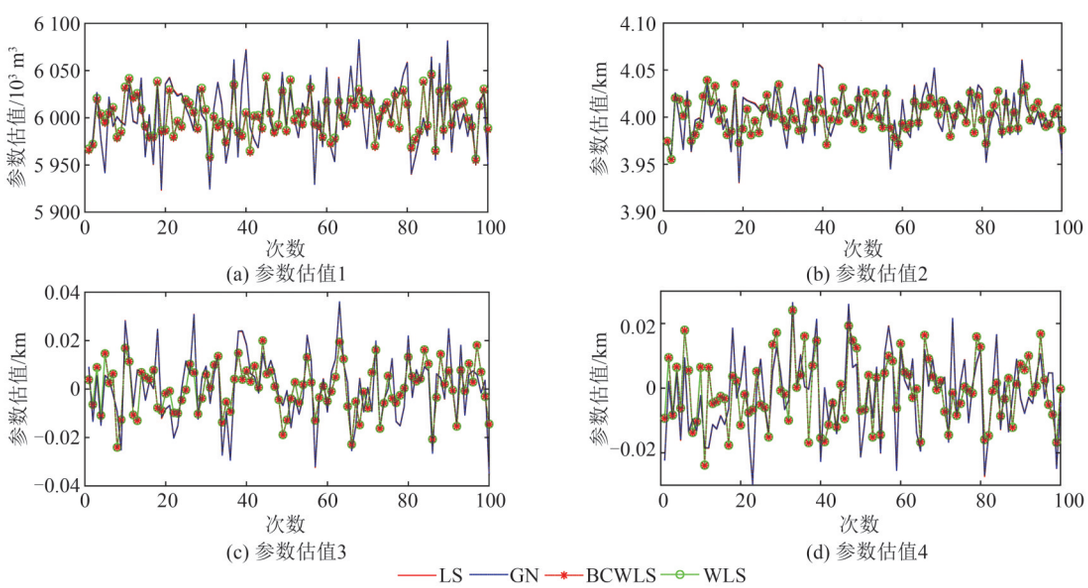


图6 100组各个参数估值结果

Fig. 6 Estimation Results of Each Parameter in 100 Groups

表3 模型3的参数估值与2范数

Table 3 Parameter Estimation and 2-Norm of Model 3

项目	$\beta_1/10^3\,\mathrm{m}^3$	β_2/km	$\beta_3/10^{-6}$ km	$\beta_4/10^{-6}$ km	$\|\Delta\beta\|$	σ_0^2
真值	6 000	4	0	0		0.09
方案1	6 002.655 037	4.003 377	0.539 1	−1.890 0	2.655 040	4.078 486
方案2	6 002.520 833	4.003 256	0.549 6	−1.875 0	2.520 835	4.078 481
方案3	6 002.589 992	4.002 479	0.390 7	−0.816 0	2.589 991	0.090 849
方案4	6 001.231 704	4.002 470	0.700 8	−0.820 7	1.231 706	0.090 889

对比分析表3中参数估计结果与其真值的2范数可得,与方案4相比,方案1、方案2和方案3求得的2范数结果都较大,分别为2.655 040、2.520 835和2.589 991;当模型的非线性强度较高时,线性化方法的参数估计结果是最差的。因此,当模型过于复杂,传统的线性化方法已经不适用时,就需要进行迭代求解。通过非线性函数的回归分析可以得出,非线性函数的非线性特点将会使得参数估值产生偏差,所以方案3的结果会产生一定的偏差,其2范数的结果相对而言会

较差一些,而方案 4 是对方案 3 的参数估值进行了偏差改正,由于该模型的非线性强度较高且函数形式更为复杂,其 2 范数比方案 3 的 2 范数更小,为 1.231 706。上述结论验证了对于非线性较强且函数形式较为复杂的加性乘性混合误差模型的参数估计而言,方案 4 更具有优势,其参数估值结果也更加准确。

通过对表 3 中的单位权方差的分析可知,方案 1 和方案 2 的单位权方差的估值偏离真值较远,原因在于这两种方案都未考虑非线性加性乘性混合误差模型中观测值的权;而方案 3 和方案 4 都考虑了模型观测值的方差-协方差矩阵的影响,单位权方差的估值会更加接近于真值,在一定程度上表明合理的定权方法对于非线性加性乘性混合误差模型参数估值的积极影响,与方案 1 和方案 2 相比较,方案 3 和方案 4 更有优势。

4.4　算例 4

为了进一步验证 LS、高斯-牛顿法、WLS 和 BCWLS 在处理非线性加性乘性混合误差模型的实际数据的可行性和潜在应用价值,算例 4 将文献[27]中的例 7-5 进行改化,根据已知点 A、B 和 C 点,求得待定点 D 的坐标值 β_1 和 β_2,独立观测如图 7 所示的测边网。测边网的非线性平差模型的函数形式如下:

$$f(\boldsymbol{\beta})=\sqrt{(\beta_1-X)^2+(\beta_2-Y)^2} \tag{46}$$

式中,X 和 Y 分别是已知点 A、B、C 的 x 和 y 坐标,$X\in[2\,692.201,2\,092.765,2\,210.593]$ m,$Y\in[5\,203.153,5\,132.304,5\,665.422]$ m;

受到乘性误差和加性误差干扰的观测方程如下:

$$y=\left(\sqrt{(\beta_1-X)^2+(\beta_2-Y)^2}\right)\odot(1+\boldsymbol{\varepsilon}_m)+\boldsymbol{\varepsilon}_a \tag{47}$$

式中,y 为观测值;$\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ 分别为独立同分布的乘性随机误差和加性随机误差。本算例中,设定 β_1 和 β_2 的真值分别为 2 326.259 m 和 5 330.184 m,$\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ 的标准差分别为 0.05 mm 和 15 mm,单位权方差为 0.09。

乘性和加性混合误差对测边网平差模型的干扰很严重。为了减小乘性和加性混合随机误差对该平差模型的影响,利用前面 4 种方案分别对该误差模型的未知参数和单位权方差进行求解,其均值、单位权方差和 2 范数分别列于表 4。由于乘性和加性误差随机性的影响,参数估值的 100 组独立模拟实验结果之间波动较大,因此将其数据绘于图 8 中。

通过对比表 4 中 4 种方案的参数估值以及参数估值与真值之间的 2 范数可得,对于同时包含加性和乘性随机误差的测边网平差模型而言,方案 2 的 2 范数是最大的,方案 1 由于线性化的方法,在初始较好的情况下,其 2 范数相对于方案 2 会好一些,方案 3 和方案 4 的参数估值与真值之差与方案 1 和方案 2 相比,其准确性会有所提高,其 2 范数进一步说明了该结果,表明合理的定权方案能够得到较为合理的参数估值。通过将方案 4 与方案 1~3 进行对比分析可知,方案 4 优于方案 1~3,参数估值更加接近于真值,其 2 范数也很小,为 1.695 528,其参数估值的正确性是最高的。

同时,从表 4 中单位权方差的估值结果可以看出,由于方案 1 和方案 2 未考虑到观测值的权

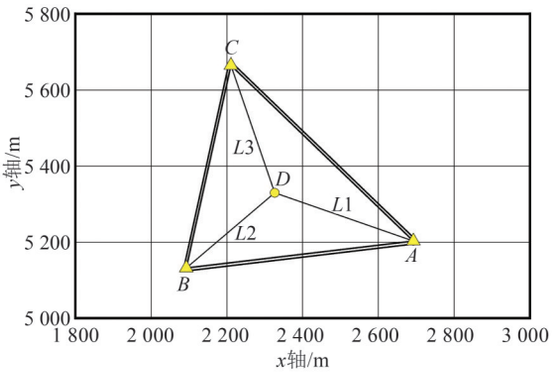


图 7　测边网

Fig. 7　Border Measurement Network

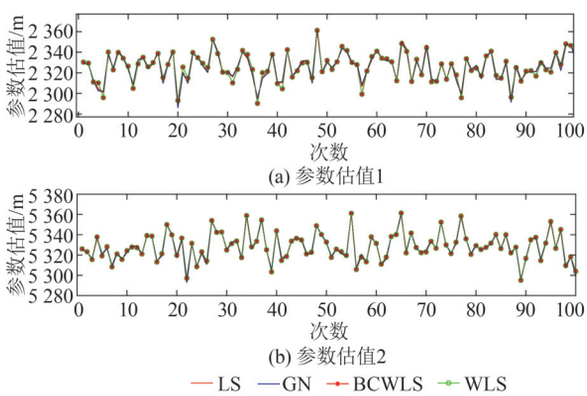


图 8　100 组各个参数估值结果

Fig. 8　Estimation Results of Each Parameter in 100 Groups

表 4　模型 4 的参数估值与 2 范数

Table 4　Parameter Estimation and 2-Norm of Model 4

项目	β_1/m	β_2/m	$\|\Delta\beta\|$	σ_0^2
真值	2 326.259	5 330.184		0.09
方案 1	2 325.813 010	5 328.492 122	1.749 673	326.449 962
方案 2	2 325.700 997	5 328.410 668	1.859 052	325.667 101
方案 3	2 325.895 473	5 328.526 026	1.697 360	0.093 187
方案 4	2 325.901 051	5 328.526 686	1.695 528	0.093 188

值,两个方案的单位权方差估值严重偏离于真值,且不符合实际情况。方案3和方案4都考虑了观测值权值的影响,其单位权方差的估值与真值也较为接近。上述实验结果说明方案4在处理混合加性乘性混合随机误差的测边网平差模型中的可行性和优势性。

5 结 语

本文在文献[10]对于线性加性乘性混合误差模型的理论研究基础上,将其扩展到非线性加性乘性混合误差模型的参数估计方法的研究,针对未知参数和观测值是非线性的关系,通过误差传播定律确定了其合理的权阵,应用LS原理、泰勒级数展开的思想和高斯-牛顿法,推导了其相应的LS解、高斯-牛顿解和WLS解的求解公式,并对非线性情况下的WLS解进行了偏差分析,推导了其二阶情况下的求解公式。通过对模拟实验结果的分析,可得合理的定权方法对于非线性加性乘性混合误差模型的参数估值有着积极的影响,验证了该定权方法的正确性,在这4种参数估计方法中,BCWLS估计方法更具有优势。

参 考 文 献

[1] 崔希璋,於宗俦,陶本藻,等.广义测量平差[M].2版.武汉:武汉大学出版社,2009.
CUI Xizhang, YU Zongchou, TAO Benzao, et al. Generalized Surveying Adjustment[M]. 2nd ed. Wuhan: Wuhan University Press, 2009.

[2] RODRIGUEZ E, MARTIN J M. Theory and Design of Interferometric Synthetic Aperture Radars[J]. *IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing)*, 1992, 139(2): 147.

[3] XU P L. Despeckling SAR-Type Multiplicative Noise[J]. *International Journal of Remote Sensing*, 1999, 20(13): 2577-2596.

[4] XU P L, SHI Y, PENG J H, et al. Adjustment of Geodetic Measurements with Mixed Multiplicative and Additive Random Errors[J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(7): 629-643.

[5] MACDORAN P F. Satellite Emission Radio Interferometric Earth Surveying Series—GPS Geodetic System[J]. *Bulletin Géodésique*, 1979, 53(2): 117-138.

[6] SHI Y, XU P L. Adjustment of Measurements with Multiplicative Random Errors and Trends[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2021, 18(11): 1916-1920.

[7] WEDDERBURN R W M. Quasi-Likelihood Functions, Generalized Linear Models, and the Gauss-Newton Method[J]. *Biometrika*, 1974, 61(3): 439-447.

[8] XU P L, SHIMADA S. Least Squares Parameter Estimation in Multiplicative Noise Models[J]. *Communications in Statistics — Simulation and Computation*, 2000, 29(1): 83-96.

[9] 师芸.乘性随机误差模型的最小二乘平差与精度评定[J].西南交通大学学报,2014,49(5):799-803.
SHI Yun. Least Squares Adjustment and Accuracy Estimation in Multiplicative Error Models[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2014, 49(5): 799-803.

[10] 王乐洋,陈涛,邹传义.病态乘性误差模型的加权最小二乘正则化迭代解法及精度评定[J].测绘学报,2021,50(5):589-599.
WANG Leyang, CHEN Tao, ZOU Chuanyi. Weighted Least Squares Regularization Iteration Solution and Precision Estimation for Ill-Posed Multiplicative Error Model[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2021, 50(5): 589-599.

[11] 王乐洋,邹传义.乘性误差模型参数估计及精度评定的Sterling插值方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2022,47(2):219-225.
WANG Leyang, ZOU Chuanyi. Sterling Interpolation Method for Parameter Estimation and Precision Estimation in Multiplicative Error Model[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(2): 219-225.

[12] 陈杨.乘性误差随机模型的粗差探测[D].西安:西安科技大学,2017.
CHEN Yang. Gross Error Detection of Stochastic Model with Multiplicative Error[D]. Xi'an: Xi'an University of Science and Technology, 2017.

[13] 师芸.加乘性混合误差模型参数估计方法及其应用[J].武汉大学学报(信息科学版),2014,39(9):1033-1037.
SHI Yun. Least Squares Parameter Estimation in Additive / Multiplicative Error Models for Use in Geodesy[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2014, 39(9): 1033-1037.

[14] WANG L Y, CHEN T. Virtual Observation Iteration Solution and A-Optimal Design Method for Ill-Posed Mixed Additive and Multiplicative Random Error Model in Geodetic Measurement[J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2021, 147(4): 04021016.

[15] 王乐洋,韩澍豪.不等式约束下加乘性混合误差模型的简单迭代解法[J].武汉大学学报(信息科学版),2024,49(6):996-1004.

WANG Leyang, HAN Shuhao. A Simple Iterative Solution for Mixed Additive and Multiplicative Random Error Model with Inequality Constraints[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024, 49(6): 996-1004.

[16] 王新洲. 非线性模型参数估计理论与应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.
WANG Xinzhou. Theories and Applications of Nonlinear Model Parameter Estimation[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2002.

[17] Wright S, Nocedal J. Numerical Optimization[J]. *Springer Science*, 1999, 35(67-68): 7.

[18] 张彦栋, 许才军, 汪建军. 一种基于*F-J*线性-非线性模型解的迭代最小二乘方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2019, 44(12): 1816-1822.
ZHANG Yandong, XU Caijun, WANG Jianjun. An Iterative Least Squares Method Based on the *F-J* Inversion for Linear-Non-Linear Models[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2019, 44(12): 1816-1822.

[19] 曾小牛, 刘代志, 牛超, 等. 改进高斯-牛顿法的位场向下延拓[J]. 测绘学报, 2014, 43(1): 37-44.
ZENG Xiaoniu, LIU Daizhi, NIU Chao, et al. A Modified Gauss-Newton Method for Downward Continuation of Potential Field[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2014, 43(1): 37-44.

[20] 曲国庆, 孙振, 苏晓庆, 等. 非线性参数估计的自适应松弛正则化算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2019, 44(10): 1491-1497.
QU Guoqing, SUN Zhen, SU Xiaoqing, et al. Adaptive Relaxation Regularization Algorithm for Nonlinear Parameter Estimation[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2019, 44(10): 1491-1497.

[21] 万永革, 刘瑞丰, 李鸿吉. 用遗传算法反演京津唐张地区的三维地壳结构和震源位置[J]. 地震学报, 1997, 19(6): 623-633.
WAN Yongge, LIU Ruifeng, LI Hongji. Inversion of Three-Dimensional Crustal Structure and Focal Location in Beijing-Tianjin-Tangzhang Area by Genetic Algorithm [J]. *Acta Seismologica Sinica*, 1997, 19(6): 623-633.

[22] 冯万鹏, 李振洪. InSAR资料约束下震源参数的PSO混合算法反演策略[J]. 地球物理学进展, 2010, 25(4): 1189-1196.
FENG Wanpeng, LI Zhenhong. A Novel Hybrid PSO/Simplex Algorithm for Determining Earthquake Source Parameters Using InSAR Data[J]. *Progress in Geophysics*, 2010, 25(4): 1189-1196.

[23] 靳锡波, 王乐洋. 一种火山岩浆源参数反演的粒子群算法[J]. 测绘科学, 2020, 45(8): 64-69.
JIN Xibo, WANG Leyang. A Particle Swarm Optimization Algorithm for Inversion of Volcanic Magma Source Parameters[J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2020, 45(8): 64-69.

[24] 王乐洋, 许冉冉, 靳锡波, 等. 非线性反演算法的综合评价对比[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(3): 341-351.
WANG Leyang, XU Ranran, JIN Xibo, et al. Comprehensive Evaluation and Comparison of Nonlinear Inversion Algorithms[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(3): 341-351.

[25] 王乐洋, 靳锡波, 许光煜. 断层参数反演的动态惯性因子的粒子群算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2021, 46(4): 510-519.
WANG Leyang, JIN Xibo, XU Guangyu. Particle Swarm Optimization Algorithm with Dynamic Inertia Factors for Inversion of Fault Parameters[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2021, 46(4): 510-519.

[26] 李志强. 非线性平差精度评定的Bootstrap重采样方法研究[D]. 抚州: 东华理工大学, 2021.
LI Zhiqiang. Research on Bootstrap Resampling Method of Nonlinear Adjustment Accuracy Evaluation[D]. Fuzhou: East China Institute of Technology, 2021.

[27] 武汉大学测绘学院测量平差学科组. 误差理论与测量平差基础[M]. 3版. 武汉: 武汉大学出版社, 2014.
Surveying Adjustment Group of School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University. Error Theory and Foundation of Surveying Adjustment[M]. 3rd ed. Wuhan: Wuhan University Press, 2014.